大阪大学大学院工学院研究科
電気電子情報通信工学専攻 2020

Picaro

2025 年 10 月 5 日

■解答

(1)

(i)$1 \leq m \leq n-1$ のとき、行列 $\boldsymbol{A}^m$ の (i,j) 成分を $a_{i,j}$ とすると、

$$\boldsymbol{A}^m = \begin{cases} a_{i,i+m} = \mu^m & (1 \leq i \leq n-m) \\ 0 & \text{(otherwise)} \end{cases}$$

(打つのが面倒なのでかなり省略してます。μ が斜めに並んでるラインが右上に上がりつつ、μ の指数が増えていくイメージ。証明は帰納法で。)

(ii)$m \geq n$ のとき、$\boldsymbol{A}^m = \boldsymbol{0}$

(2)　n 次の単位行列を $\boldsymbol{E}$ とすると、

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = (-\lambda)^n = 0$$

より、固有値 λ は 0

(3)

$$\boldsymbol{B} = \nu \boldsymbol{E} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \nu \boldsymbol{E} + \boldsymbol{N}$$

とすると、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}^m &= (\nu \boldsymbol{E} + \boldsymbol{N})^m \\ &= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \nu^{m-k} \boldsymbol{N}^k \\ &= \nu^m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + m\nu^{m-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{m(m-1)}{2} \nu^{m-2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \nu^m & m\nu^{m-1} & \frac{m(m-1)}{2}\nu^{m-2} \\ 0 & \nu^m & m\nu^{m-1} \\ 0 & 0 & \nu^m \end{bmatrix} \end{aligned}$$