■解答

(1)

$$x^2\frac{dy}{dx} - y^2 = xy$$

$x = 0$ は特異点となるため省く。$x \neq 0$ として両辺を x^2で割ると、

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y^2}{x^2} = \frac{y}{x} \tag{a}$$

ここで、$\dfrac{y}{x} = u$ とすると、$y' = u'x + u$ となるので、これを (a) に代入する。

$$\begin{aligned} u'x + u - u^2 &= u \\ u'x &= u^2 \\ \frac{u'}{u^2} &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

両辺を積分して、

$$\begin{aligned} -u^{-1} &= \ln|x| + C \qquad (C \in \mathbb{R}) \\ u &= -\frac{1}{\ln|x| + C} \end{aligned}$$

u を $\dfrac{y}{x}$ に戻して、

$$y = -\frac{x}{\ln|x| + C}$$

(2)　与式の同伴方程式は以下のようにあらわされる。

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 9y = 0 \tag{b}$$

この同伴方程式 (b) の一般解と、与式の特殊解の和が一般解となる。
(b) の一般解を求めるため、$y = e^{\lambda x}$ とおいて特性方程式を解く。

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 5\lambda + 9 &= 0 \\ \lambda &= \frac{-5 \pm \sqrt{11}i}{2} \end{aligned}$$

よって (b) の一般解は

$$y = e^{-\frac{5}{2}x}(C_1 \cos\frac{\sqrt{11}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{11}}{2}x) \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

次に、与式の特殊解 y_p を $A\cos 3x + B\sin 3x \qquad (A, B \in \mathbb{R})$ 　と仮定する。
これを与式に代入すると、

$$\begin{aligned} (-9A\cos 3x - 9B\sin 3x) + 5(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x) + 9(A\cos 3x + B\sin 3x) &= \sin 3x \\ (-9A + 15B + 9A)\cos 3x + (-9B - 15A + 9B)\sin 3x &= \sin 3x \\ 15B\cos 3x - 15A\sin 3x &= \sin 3x \end{aligned}$$

となるので、係数比較をして $15B=0, -15A=1 \Leftrightarrow A=-\frac{1}{15}, B=0$ となる。これを y_p に代入すると、$y_p=-\frac{1}{15}\cos 3x$ となる。前半で求めた y とあわせて $y+y_p$ が与式の一般解となるので、求める一般解は、

$$y=e^{-\frac{5}{2}x}(C_1\cos\frac{\sqrt{11}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{11}}{2}x)-\frac{1}{15}\cos 3x$$