電通大情報学専攻 2019 年

Picaro

2025 年 9 月 28 日

■解答

問 1

(1)　$f_x = 6x^2 + 4y, f_y = -3y^2 + 4x$ より、$(x, y) = (1, -1)$ をそれぞれに代入して、
$f_x(1, -1) = 2, f_y(1, -1) = 1$

(2)　$y = \varphi(x)$ は $(1, -1)$ を通るので、$\varphi(1) = -1$
$f_x + f_y \dfrac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \varphi'(x) = -\dfrac{f_x}{f_y}$　(1) の答えを代入して、$\varphi'(1) = -\dfrac{2}{1} = -2$
商の微分公式を用いて$\varphi''(x)$ を求めると、

$$\varphi''(x) = \frac{d}{dx}(-\frac{f_x}{f_y}) = -\frac{\frac{df_x}{dx} f_y - f_x \frac{df_y}{dx}}{f_y^2}$$

これを計算すると、

$$\varphi''(x) = -\frac{(12x + 4y')(-3y^2 + 4x) - (6x^2 + 4y)(-6yy' + 4)}{(-3y^2 + 4x)^2}$$

これに $(x, y) = (1, -1), y' = \varphi(1) = -2$ を代入して、$\varphi''(x) = -20$

問 2

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_0^x \frac{y}{\sqrt{1 + x^3}} \, dy \, dx \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{\sqrt{1 + x^3}} \cdot \frac{1}{2} y^2 \right]_0^x dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1 + x^3}} \, dx \qquad 1 + x^3 = t \text{ とすると、} 3x^2 dx = dt, t : 1 \to 2 \\
&= \frac{1}{6} \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t}} \, dt \\
&= \frac{1}{6} \left[2\sqrt{t} \right]_1^2 \\
&= \frac{\sqrt{2} - 1}{3}
\end{aligned}$$