■**解答**

(1)　$\det A = 0$ のとき、逆行列を持たない。余因子展開を用いて行列式を求めると、

$$\begin{aligned}\det A &= c\begin{vmatrix} a & b \\ -1 & -b \end{vmatrix} \\ &= c(-ab+b) \\ &= bc(-a+1)\end{aligned}$$

$b>0, c>0$ より $\det A = 0$ となるのは、$a=1$

(2)

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda E) &= \begin{vmatrix} a-\lambda & b & 0 \\ -1 & -b-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & c-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (c-\lambda)\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ -1 & -b-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + (a-b+c)\lambda^2 + (ab-ac+bc-b)\lambda + bc - abc\end{aligned}$$

固有値が $0, 1, -1$ のとき、固有多項式は

$$-\lambda(\lambda-1)(\lambda+1) = -\lambda^3 + \lambda$$

となるはずなので、係数を比較して、

$$\begin{aligned} a-b+c &= 0 \\ ab-ac+bc-b &= 1 \\ bc-abc &= 0 \end{aligned}$$

これらを解いて、$a=1, b=2, c=1 \qquad (\because c>0)$

(i)$\lambda = 0$ のとき

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より、

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 &= 0 \\ -\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

これらを解いて、固有ベクトル $\boldsymbol{x_1}$ を求めると

$$\boldsymbol{x_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。(ii)$\lambda = 1$ のとき

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より、

$$\begin{aligned} 2\beta_2 &= 0 \\ -\beta_1 - 3\beta_2 + \beta_3 &= 0 \end{aligned}$$

これらを解いて、固有ベクトル $\boldsymbol{x_2}$ を求めると

$$\boldsymbol{x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。(iii)$\lambda = -1$ のとき

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より、

$$\begin{aligned} 2\gamma_1 + 2\gamma_2 &= 0 \\ -\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 &= 0 \\ 2\gamma_3 &= 0 \end{aligned}$$

これらを解いて、固有ベクトル $\boldsymbol{x_3}$ を求めると

$$\boldsymbol{x_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって、

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x_2} & \boldsymbol{x_3} \end{pmatrix}$$

より、

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(3)　ケーリーハミルトンの定理より、$\det(A-\lambda E)=0$ の多項式のλを A に変えたものはゼロ行列になる。固有値が $0, c, -c$ ということは、固有多項式は

$$\lambda(\lambda-c)(\lambda+c)=0$$

であるので、この λを A に変えて、

$$A^3=c^2A$$

このことから、帰納法で

$$g(A)=\sum_{k=1}^{n}A^{2k-1}=\sum_{k=1}^{n}c^{2(k-1)}A=A\sum_{k=0}^{n-1}(c^2)^k$$

無限等比級数の公式より、

$$g(A)=A\frac{1-c^{2n}}{1-c^2}$$

これは $c^2=1$ では成立しないので、$c^2=1$ について調べると、

$$g(A)=nA$$

以上のことから、解答は以下のようになる。

$$\begin{cases} g(A)=A\dfrac{1-c^{2n}}{1-c^2} \qquad (c^2\neq 1) \\ g(A)=nA \qquad (c^2=1) \end{cases}$$